通信路容量の物理的限界(量子情報理論と開放系)

小澤, 正直

数理解析研究所講究録
982 巻 1997 年 173-185

通信路容量の物理的限界

名古屋大学情報文化学部　小澤正直　(Masanao Ozawa)

1. はじめに

Shannon の情報理論では通信の物理的機構を電磁場の古典物理学で記述できることが前提となっていて，この前提のもとでのみ，周知のような確率論にもとづく情報量の理論が成立する．一方，レーザーの発見により可能になった光通信では，光の量子力学的性質が本質的であり，それにともない，通信の物理的記述に量子力学を取り入れることが不可欠となった．したがって，Shannon の情報理論は，そのままでは光通信に対して成立せず，ここに，量子力学にもとづく情報理論が要請されることになった．

量子情報理論は，現在，量子工学，量子物理学，数理物理学の幅広い背景をもった学問分野として注目を集めており，物理学の中からも情報物理学 (physics of information) という新分野が国際的に認知されつつある．しかしながら，この分野の研究に必要な数学的道具がまだ未開発の状態でもあり，理論の極めて基礎的な問題に関しても未解決な部分が多い．

量子情報理論における最も基本的な問題は情報通信システムにおいて伝送可能な情報量の量子力学的限界を数学的に厳密な方法により導出することである．この報告では，そのうちでも最も基本的と思われる情報量の究極的限界に関する問題が考察の対象となる．そのため，考察の中心部分は問題を数学的に厳密に定式化し，それを解決することに帰着される．その結果，現代数学の一分野である作用素環論において 1977 年に発見された一定理がその問題解決の鍵になることが導かれる．作用素環論は量子力学の基礎付けと群の無限次元表現論のために Murray と von Neumann によって 1930 年代に創始された理論であるが，場の量子論と量子統計力学の数学的基礎のために近年大いに発展しつつある分野である．この報告における中心的成果の一つは，量子統計力学の平衡状態の理論的考察のために発展したエントロピー理論における一定理が量子情報理論において長年未解決であった問題の解決に応用されることが見いだされることである．

2. Shannon の理論

電磁場を古典物理学的に扱う限りにおいて，平均信号電力 S，加法的白色雑音電力 N，帯域幅 W の情報路の情報容量は

$$C = W \log \left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{1}$$

で与えられることが Shannon により示されている．ここで，log の底が 2 のとき，単位は bit/sec である．また，この容量を実現させるためには，信号が白色雑音の統計的乱雑さをもつように変調する必要がある．以上，[SW49, pp. 97–107] を参照．

3. Gabor の仕事

Shannon の理論によれば，S-N 比を無限大にする極限において情報容量が無限大になることが導かれるが，これは正しくない．実際，不確定性原理から電磁場を任意の精度で測定することはできず，このことから，S-N 比の上限に物理学的制約が現れる．この考えにもとづいて，Gabor [Gab50] は電磁場による通信路の量子化の概念を導入し，量子雑音の存在を指摘した．

その後，この考えは Gordon [Gor62]，Levedev-Levetin [LL66]，高橋 [Tak66]，Bowen [Bow67] に引き継がれ，量子化された電磁場で伝送可能な通信容量の研究がなされ，今日では定説になった容量の式が発見された．しかし，その導出は多くの仮設を含んでおり，その仮設の正しさを数学的に証明することが，懸案となっている．

4. 量子力学的情報通信システム

量子雑音を正確に扱うためには，Shannon が定式化した，入力情報，変調器，情報路，出力系，検出器，出力情報，からなる情報通信システムを量子力学にもとづいて，再定式化する必要がある．

最も一般的な量子力学的情報通信システムは，

1. 確率分布 $P(d\theta)$ をもつ符号化された入力情報 $\theta \in \Theta$，
2. 入力情報 θ が変調器により変調され，情報路により伝送されて，出力系に生じる量子力学的状態 ρ_θ，
3. 出力系と検出器との相互作用により得られる出力情報 $x \in X$ の確率分布を導く一般化量子測定を表す作用素値確率測度 $F(dx)$

により数学的に定式化される．ここで，出力系は，ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を状態空間としてもつ量子力学系であり， ρ_θ は $\mathcal{H}$ 上の密度作用素であり，また， $F(dx)$ は $\mathcal{H}$ 上の正値作用素に値をもつ，いわゆる，非直交的単位の分解である．

このとき，入力情報 θ と出力情報 x の結合確率分布は，

$$P(d\theta, dx) = \mathrm{Tr}[F(dx)\rho_\theta]P(d\theta) \tag{2}$$

によって与えられ，この情報通信システムの伝送情報量は θ と x の相互情報量

$$I(\theta; x) = \iint_{\Theta\times X} P(d\theta, dx) \log \frac{P(d\theta, dx)}{P(d\theta)P(dx)} \tag{3}$$

で与えられる．ここに， $P(dx)$ は周辺分布

$$P(dx) = \int_{\theta\in\Theta} P(d\theta, dx) \tag{4}$$

であり， $\dfrac{P(d\theta, dx)}{P(d\theta)P(dx)}$ は Radon-Nikodym の微分である．

5. 量子力学的情報容量

量子統計力学において，量子状態 σ のエントロピー $S(\sigma)$ は

$$S(\sigma) = -\mathrm{Tr}[\sigma \log \sigma] \tag{5}$$

で与えられる．1963 年頃より，量子力学的伝送情報量の上限がこの量子状態のエントロピーを用いて，

$$I(\theta; x) \le S(\rho) - \int_\Theta S(\rho_\theta)P(d\theta) \tag{6}$$

で与えられることが Forney [For63] と Gordon [Gor62] によって予想されてきた．ここで， ρ は混合出力状態

$$\rho = \int_\Theta \rho_\theta P(d\theta) \tag{7}$$

である．この予想の証明に関して Holevo [Hol73] や Devies [Dav78] による部分的貢献がなされたが，必要とされる一般的解決は懸案であった．(Holevo [Hol73] では， X, Θ が有限集合で， $\mathcal{H}$ が有限次元の場合に証明が与えられている.)

この報告の中心課題は量子力学的伝送情報量の上限 (6) を完全に一般的な仮定のもとで，厳密に証明することである．このことにより，量子化された電磁場による通信の通信容量などの，原理的諸問題を解決することができる．

この問題の本質的困難は，左辺の確率論的エントロピーと右辺の量子論的エントロピーという，二種類の異なるエントロピーの間の数学的関係を明かにすることにある．そこで，

この二種類のエントロピーの関連を研究するために，作用素環の状態に関する相対エントロピーの理論を利用する．その結果，この分野で知られていた Uhlmann の不等式に問題を帰着させることができる．

6. 一般相対エントロピーと Uhlmann の不等式

以下では，作用素環の基礎知識については既知とする．詳細は，例えば Bratteli-Robinson [BR79, BR81] などを参照されたい．

$\mathcal{A}$ を単位元をもつ C*-代数とする．$\mathcal{A}$ の状態とは，$\mathcal{A}$ 上の正値線型汎関数で単位元に対する値が 1 であるものである．$\mathcal{A}$ の状態 σ_1, σ_2 に対して，$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{A} | \sigma_1(xx^*) + \sigma_2(x^*x) = 0\}$ とおくと，商空間 $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ は

$$\langle x + \mathcal{K} | y + \mathcal{K} \rangle = \frac{1}{2}\sigma_1(yx^*) + \frac{1}{2}\sigma_2(x^*y) \tag{8}$$

を内積とする内積空間となる．以下，$x \in \mathcal{A}$ について，$\hat{x} = x + \mathcal{K}$ と記す．この内積空間を完備化して得られる Hilbert 空間を $\mathcal{W}$ とし，そのノルムを $\|\cdots\|$ で表す．このとき，双線型形式 $(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \sigma_1(yx^*)$ および $(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \sigma_2(x^*y)$ はともに $\mathcal{W}$ のノルムに関して有界なので，Riesz の定理より，$\mathcal{H}$ 上の有界作用素 A, B が一意に存在して，次の条件をみたす．

1. $0 \leq A,\ B \leq 1$, $A + B = 1$.
2. 任意の x, $y \in \mathcal{A}$ に対して，$\sigma_1(yx^*) = \langle \hat{x} | A | \hat{y} \rangle$.
3. 任意の x, $y \in \mathcal{A}$ に対して，$\sigma_2(x^*y) = \langle \hat{x} | B | \hat{y} \rangle$.

このとき，状態 σ_1 の σ_2 に関する相対エントロピー $S(\sigma_1/\sigma_2)$ が次のように定義される．

$$S(\sigma_1/\sigma_2) = -\liminf_{t \to +0} \langle \hat{1} | \frac{A^{1-t}B^t}{t} | \hat{1} \rangle. \tag{9}$$

これより，$\hat{1} \in \mathrm{dom}(\log A - \log B)$ のとき，

$$S(\sigma_1/\sigma_2) = \langle \hat{1} | A(\log A - \log B) | \hat{1} \rangle \tag{10}$$

となる．

C*-代数 $\mathcal{A}$ が可測空間 Ω の有界可測関数環 $B(\Omega)$ のとき，Ω 上の確率測度 μ_1, μ_2 に対して，$B(\Omega)$ の状態 σ_1, σ_2 が一意に存在して，

$$\sigma_1(x) = \int x\, d\mu_1, \qquad \sigma_2(x) = \int x\, d\mu_2 \tag{11}$$

となる．このとき， $m=\frac{1}{2}\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2$ とすると， $\mathcal{W}$ は $L^2(\Omega,m)$ と同型で，

$$A\hat{x}=\frac{d\mu_1}{dm}\hat{x}, \qquad B\hat{x}=\frac{d\mu_2}{dm}\hat{x} \tag{12}$$

となり， $\mu_1 \ll \mu_2$ のとき，

$$S(\sigma_1/\sigma_2)=S(\mu_1/\mu_2)\equiv\int\log\frac{d\mu_1}{d\mu_2}\,d\mu_1 \tag{13}$$

となる．ただし， $S(\mu_1/\mu_2)$ は確率測度 μ_1 の μ_2 に関する確率論的相対エントロピーである．

C*-代数 $\mathcal{A}$ が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の有界作用素の全体 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ のとき， $\mathcal{H}$ 上の密度作用素 ρ_1，ρ_2 に対応して，正規状態σ_1，σ_2 が一意に存在して，

$$\sigma_1(x)=\mathrm{Tr}[x\rho_1], \qquad \sigma_2(x)=\mathrm{Tr}[x\rho_2] \tag{14}$$

となる．このとき， $\mathcal{A}/\mathcal{K}$ 上の内積は

$$\langle\hat{x}|\hat{y}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[x^*(\rho_1 y+y\rho_2)] \tag{15}$$

で定義され，

$$A\hat{x}=\widehat{\rho_1 x}, \qquad B\hat{x}=\widehat{x\rho_2} \tag{16}$$

となる．これから，

$$S(\sigma_1/\sigma_2)=S(\rho_1/\rho_2)\equiv\mathrm{Tr}[\rho_1(\log\rho_1-\log\rho_2)] \tag{17}$$

が得られる．ただし， $S(\rho_1/\rho_2)$ は量子状態（密度作用素） ρ_1 の ρ_2 に関する量子論的相対エントロピーである．

このように一般的に定義された相対エントロピーに対して，次の定理が成立する．

定理１（Uhlmann の不等式） $\Phi:\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$ を C*-代数 $\mathcal{A}_1$ から C*-代数 $\mathcal{A}_2$ への単位元を保存する完全正写像とし， $\Phi^*:\mathcal{A}_2^*\to\mathcal{A}_1^*$ をその共役写像とする．このとき， $\mathcal{A}_2$ の任意の状態 σ_1，σ_2 に対して，不等式

$$S(\Phi^*(\sigma_1)/\Phi^*(\sigma_2))\leq S(\sigma_1/\sigma_2) \tag{18}$$

が成立する．

この定理は Uhlmann [Uhl77] によって証明された．

7. 相互情報量の量子力学的限界

次の各項目で表される一般的な量子力学的情報通信システムの考察にもどる：

1. 確率分布 $P(d\theta)$ をもつ符号化された入力情報 $\theta \in \Theta$,
2. 入力情報 θ が変調器により変調され，情報路により伝送されて，出力系に生じる量子力学的状態 ρ_θ ,
3. 出力系と検出器との相互作用により得られる出力情報 $x \in X$ の確率分布を導く一般化量子測定を表す作用素値確率測度 $F(dx)$.

ここで，出力系は，ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を状態空間としてもつ量子力学系であり， ρ_θ は $\mathcal{H}$ 上の密度作用素であり，また， $F(dx)$ は $\mathcal{H}$ 上の正値作用素に値をもつ，いわゆる，非直交的単位の分解である.

作用素値確率速度 $F(dx)$ であらわされる測定が状態 σ で行われるとき，測定結果すなわち出力情報 $x \in X$ の確率分布は

$$P[\sigma](dx) = \mathrm{Tr}[F(dx)\sigma] \tag{19}$$

で与えられる．したがって，入力情報 $\theta \in \Theta$ に対する出力情報 $x \in X$ の条件付き確率分布は

$$P(dx|\theta) = P[\rho_\theta](dx) \tag{20}$$

である．こうして，入力情報から出力情報への推移確率が条件付き確率分布 $P[\rho_\theta](dx)$ で表現され，その相互情報量 $I(\theta;x)$ が式 (3) により定義される.

この相互情報量の上限について次の定理が成立する [YO93].

定理 2 . (Yuen-Ozawa の不等式) 確率空間 $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta), P(d\theta))$, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素の可測族 $\{\rho_\theta |\ \theta \in \Theta\}$, および可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ から Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への確率作用素値測度 $F(dx)$ に対して,

$$I(\theta;x) \le S(\rho) - \int S(\rho_\theta)P(d\theta). \tag{21}$$

が成立する．ただし， $I(\theta;x)$ および ρ はそれぞれ式 (3) と (7) により定義される.

この不等式は， X, Θ が有限集合で， $\mathcal{H}$ が有限次元のときは，Holevo の不等式と呼ばれている．証明は次のとおりである.

まず，式 (7) で定義される混合出力状態 ρ を考えると，出力情報 $x \in X$ の確率分布は

$$P(dx) = P[\rho](dx) \tag{22}$$

と表される．一方，確率分布 $P[\rho]$ に対する確率分布 $P[\rho_\theta]$ の相対エントロピーは

$$S(P[\rho_\theta]/P[\rho]) \equiv \int P[\rho_\theta](dx) \log \frac{dP[\rho_\theta]}{dP[\rho]}(x), \tag{23}$$

で与えられる．ここで， $dP[\rho_\theta]/dP[\rho]$ は $P[\rho_\theta]$ の $P[\rho]$ に関する Radon-Nikodym 微分である．このとき，相互情報量のもつ対称性

$$I(\theta; x) = I(x; \theta) \tag{24}$$

から，相互情報量を

$$I(\theta; x) = \int S(P[\rho_\theta]/P[\rho]) P(d\theta) \tag{25}$$

と表すことができる．二つの密度作用素の相対エントロピーは

$$S(\sigma_1/\sigma_2) \equiv \mathrm{Tr}[\sigma_1 \log \sigma_1 - \sigma_1 \log \sigma_2] \tag{26}$$

だから，式 (21) の右辺は

$$S(\rho) - \int S(\rho_\theta) P(d\theta) = \int S(\rho_\theta/\rho) P(d\theta) \tag{27}$$

となる．そこで， (25), (27) から，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，

$$S(P[\rho_\theta]/P[\rho]) \leq S(\rho_\theta/\rho). \tag{28}$$

を示せばよい．Uhlmann の不等式を利用するために，$\mathcal{A}_1$ を X 上の複素数値有界可測関数の C*-代数 $B(X)$ とし，$\mathcal{A}_2$ を $\mathcal{H}$ 上の有界作用素の C*-代数 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ とする．このとき，$\mathcal{A}_1^*$ は Θ 上の有限加法的複素数値測度の空間と一致し， $\mathcal{A}_2^*$ は $\mathcal{H}$ 上の跡族作用素の空間を含んでいる．写像 $\Phi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ を次のように定義する．

$$\Phi(f) = \int f(x) F(dx) \qquad (f \in B(X)). \tag{29}$$

この Φ は明らかに完全正値写像であり，共役写像

$$\Phi^* : \mathcal{A}_2^* \to \mathcal{A}_1^* \tag{30}$$

は密度作用素 σ を確率測度 $\mathrm{Tr}[F(dx)\sigma]$ に変換する．すなわち，

$$\Phi^*(\sigma) = P[\sigma]. \tag{31}$$

したがって，Uhlmann の定理により，

$$\begin{aligned} S(P[\rho_\theta]/P[\rho]) &= S(\Phi^*(\rho_\theta)/\Phi^*(\rho)) \\ &\leq S(\rho_\theta/\rho) \end{aligned} \tag{32}$$

となり，式 (28) が証明された．

8. 単一モード電磁場の究極的通信容量

量子力学的伝送情報量の上限 (21) を量子化された電磁場による通信システムに応用すると，平均量子数制限

$$\int \mathrm{Tr}[a^\dagger a \rho_\theta] P(d\theta) \leq n \tag{33}$$

のもとで，このシステムのモード当りの情報容量が

$$C_{\mathrm{MODE}} = \max I(\theta; x) = (n+1)\log(n+1) - n\log n \tag{34}$$

であることが導かれる．ここに，a はモードの演算子（消滅演算子）である．これは，入力情報と出力情報の形式（連続的，離散的，有限，無限）や，検出器で測定される物理量の種類によらない究極的情報容量を表す．ただし，log の底が 2 のとき単位は bit/use である．

この式の証明は次のようになされる．まず，式 (21) の右辺の 2 項はともに正なので，

$$I(\theta; x) \leq S(\rho). \tag{35}$$

となる．ここで，平均量子数制限 (33) より，

$$\mathrm{Tr}[a^\dagger a \rho] \leq n \tag{36}$$

である．そこで，条件 (36) のもとで式 (35) の右辺の $S(\rho)$ を最大にすることを考える．この問題は，モードの振動数を ω とすると，平均エネルギー $\hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ の制限でエントロピーを最大にする問題と一致するので，その解は Gibbs のカノニカル状態

$$\rho = \sum_{l=0}^{\infty} n^l (n+1)^{-(l+1)} |l\rangle\langle l| \tag{37}$$

で与えられる．したがって，相互情報量の上界の一つが

$$I(\theta; x) \leq S(\rho) = (n+1)\log(n+1) - n\log n \tag{38}$$

で与えられる．そこで，これが実際に最大値であることを示すため，この情報量が実現されるように情報システムを構成すればよい．そのために，入力情報の空間と出力情報の空間をともに自然数の集合 N とする, i.e., $\Theta = \mathrm{N} = \{l|\, l = 0, 1, 2, \ldots\}$, $X = \mathrm{N} = \{m|\, m = 0, 1, 2, \ldots\}$. 入力情報の確率分布は各信号 $\theta = l$ の確率が

$$P(d\theta) = P(\{l\}) = n^l (n+1)^{-(l+1)} \tag{39}$$

となるように符号化し，各信号 $\theta = l$ が量子数 l の固有状態になるように変調する, すなわち，

$$\rho_\theta = \rho_l = |l\rangle\langle l|. \tag{40}$$

また，検出器は出力系における量子数の測定を行うようにすれば，作用素値確率測度は量子数演算子の単位の分解で与えられる．すなわち，$x = m$ に対して，

$$F(dx) = F(\{m\}) = |m\rangle\langle m|. \tag{41}$$

このとき，入力情報 $\theta = l$ と出力情報 $x = m$ の結合確率分布は

$$\begin{aligned} P(d\theta, dx) &= P(\{l, m\}) \\ &= \mathrm{Tr}[F(\{m\})\rho_l]P(\{l\}) \\ &= \delta_{lm} n^l (n+1)^{-(l+1)} \end{aligned} \tag{42}$$

となり，出力情報 $x = m$ の周辺分布は

$$P(dx) = P(\{m\}) = \sum_{l=0}^{\infty} P(\{l, m\}) = n^m (n+1)^{-(m+1)} \tag{43}$$

である．したがって，θ と x との相互情報量は

$$\begin{aligned} I(\theta; x) &= \sum_{l,m}^{\infty} P(\{l, m\}) \log \frac{P(\{l, m\})}{P(\{l\})P(\{m\})} \\ &= (n+1)\log(n+1) - n \log n. \end{aligned} \tag{44}$$

となる．以上で，式 (34) が証明された．

9. 結論・今後の課題

量子力学的通信システムの情報量の限界に関して長いこと予言されていた不等式

$$I(\theta; x) \leq S(\rho) - \int S(\rho_\theta) dP(\theta). \tag{45}$$

が厳密にまた完全に一般的に証明された．証明には作用素環の状態に関する相互エントロピーの Uhlmann の不等式が利用された．この不等式を量子化された電磁場による通信システムに応用すると，平均量子数制限 n のもとで，このシステムのモード当りの情報容量 (bit/use) が

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{MODE}} &= (n+1)\log(n+1) - n\log n \\
&= \log(1+n) + n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{46}
$$

であることが導かれる．これは以前から予想されていた関係であるが，入力情報と出力情報の形式（連続的，離散的，有限，無限等）や，変調されたり，検出器で測定される物理パラメターの種類（量子数変調・量子数検出，コーヒーレント光変調・ヘテロダイン検出，スクイーズド光変調・ホモダイン検出等）によらない究極的情報容量であることが証明された．つまり，前節の証明から情報容量を達成するためには信号を電磁場の量子数に変調し，伝送された電磁場の量子数を検出するという通信システムが最も効果的であることが示された．このような通信システムに限れば，上記の情報容量は容易に予想されるものであったが，あらゆる可能な通信システムのうちでこれが最も効果的であることの証明が，Yuen-Ozawa の不等式により初めて可能になった．

すべてのモードを含む時間当たりの情報容量に関しては，まだ解決されない仮設が残っていて，完全に厳密な証明には到っていない．しかし，従来の導出における多くの仮設は上の不等式で解消したといえる．

ここで，時間当たりの情報容量とは，

$$
C = \max R \tag{47}
$$

$$
R = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}I(\theta;x) \tag{48}
$$

で定義される．ここで，T は信号を受信する時間であり，R は伝送速度と呼ばれる．帯域幅 W の波の独立なモード間の角周波数差を $\Delta\omega$ とすると，電磁波を空間的に Fourier 展開することにより，$2\pi\Delta\omega = 1/T$ となり，独立なモードの数は

$$
\frac{W}{2\pi\Delta\omega} = WT
$$

となることが知られている．量子力学では各モードにつき一回の測定しかできないので，結局，1 回の受信につき独立なモードの通信路を WT回利用でき，単位時間当たり単一モードの通信路を W 回できることになる．従って，

$$
I(\theta;x) = WT\, I_{\mathrm{MODE}}(\theta;x)
$$

$$
\begin{aligned}
R &= W\, I_{\mathrm{MODE}}(\theta; x) \\
C &= W\, C_{\mathrm{MODE}}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，R, C の単位は bit/sec である．

平均出力 P，帯域幅 W，平均角振動数 ω に対して，狭帯域の仮定のもとでは，平均量子数は

$$
n = P/\hbar\omega W \tag{49}
$$

であるから，式 (46) から究極的情報容量 (bit/sec)

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{NARROW}} &= W\, C_{\mathrm{MODE}} \\
&= W\left[\log(1+n) + n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= W\log\left(1+\frac{P}{\hbar\omega W}\right) + \frac{P}{\hbar\omega}\log\left(1+\frac{\hbar\omega W}{P}\right)
\end{aligned} \tag{50}
$$

が得られる．

さて，これまでは究極的容量を考えてきたから，対象とする通信路は無雑音であった．雑音がある場合として，Shannon の古典的考察に対応して，平均信号電力制限 S，独立な加法的白色雑音電力 N，帯域幅 W，平均角振動数 ω の電磁場を用いる情報路の容量を考えよう．入力情報 θ に従って変調され伝送された信号の場の状態を $\rho_\theta^{(S)}$ 雑音源の状態を $\rho^{(N)}$ とすると，独立性から受信場の状態は$\rho_\theta = \rho_\theta^{(S)} \otimes \rho^{(N)}$ である．よって，Yuen-Ozawa の不等式から，

$$
\begin{aligned}
I(\theta; x) &\le S(\rho) - \int S(\rho_\theta) P(d\theta) \\
&= S(\rho) - \left[\int S(\rho_\theta^{(S)}) P(d\theta) + S(\rho^{(N)})\right]
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$
\begin{aligned}
\rho &= \rho^{(S)} \otimes \rho^{(N)}, \\
\rho^{(S)} &= \int \rho_\theta^{(S)} P(d\theta).
\end{aligned}
$$

よって，明らかに，$S(\rho)$ を平均電力 $S+N$ で最大化し，$S(\rho_\theta^{(S)}) = 0$ とするとき，右辺の最大値がえられるので，(50) で $P = S+N$ とおけば，

$$
W\max S(\rho) = W\log\left(1+\frac{S+N}{\hbar\omega W}\right) + \frac{S+N}{\hbar\omega}\log\left(1+\frac{\hbar\omega W}{S+N}\right)
$$

がえられる．また，白色雑音は最大エントロピーをもつので，(50) で $P = N$ とおけば

$$
W\, S(\rho^{(N)}) = W\log\left(1+\frac{N}{\hbar\omega W}\right) + \frac{N}{\hbar\omega}\log\left(1+\frac{\hbar\omega W}{N}\right)
$$

である．従って，情報容量は

$$
\begin{aligned}
C &= W \max S(\rho) - W\, S(\rho^{(N)}) \\
&= W \log\left(1 + \frac{S}{N + \hbar\omega W}\right) + \frac{S+N}{\hbar\omega} \log\left(1 + \frac{\hbar\omega W}{S+N}\right) - \frac{N}{\hbar\omega} \log\left(1 + \frac{\hbar\omega W}{N}\right) \quad (51)
\end{aligned}
$$

となる．

この結果は，$N \gg \hbar\omega W$ のとき，Shannon の古典的な結果を導く．C を微小量 $\hbar\omega W/N$ と $\hbar\omega W/(S+N)$ で展開すれば

$$
C = W \left[\log\left(1 + \frac{S}{N}\right) - \frac{\hbar\omega W S}{2N(S+N)} \log e \cdots \right] \tag{52}
$$

を与える．ところで，$N \gg \hbar\omega W$ ならば，S/N の値によらずに第 2 項は第 1 項より極めて小さいので，第 2 項以下を無視すれば，Shannon の式 (1) がえれらる．

一方，広帯域の場合の容量を求めるには，以上の議論のほかにモード間の相関に関する仮設が必要であるが，これを証明する問題は今後に残された課題である．

参考文献

[Bow67] J. I. Bowen, On the capacity of a noiseless photon channel, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **13**, 230–236, (1967).

[BR79] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*, Springer, New York, 1979.

[BR81] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*, Springer, New York, 1981.

[Dav78] E. B. Davies, Information and quantum measurement, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **IT-24**, 596–599, 1978.

[For63] G. D. Forney, Jr, Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1963.

[Gab50] D. Gabor, Communication theory and physics, *Phil. Mag.*, **41**, 1161–1187, (1950).

[Gor62] J. P. Gordon, Quantum effects in communication systems, *Proc. IRE*, **50**, 1808–1908, (1962).

[Hol73] A. S. Holevo, Bound for the quantitiy of information transmitted by a quantum communication channel, *Probl. Inf. Transm.*, **9**, 177–183, (1973).

[LL66] D. S. Lebedev and L. B. Levitin, Information transmission by electromagnetic field, *Inform. Control*, **9**, 1–22, (1966).

[SW49] C. E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*, Univ. of Illinois Press, 1949.

[Tak66] H. Takahashi, Information theory of quantum mechanical channels, in *Advances in Communication Systems, Vol. 1*, pages 227–310, Academic Press, 1966.

[Uhl77] H. Uhlmann, Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in interpolation theory, *Commun. Math. Phys.*, **54**, 21–32, (1977).

[YO93] H. P. Yuen and M. Ozawa, Ultimate information carrying limit of quantum systems, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 363–366, (1993).